Gruber I Neumann

Im Fokus:
Mündliches Abitur Mathematik

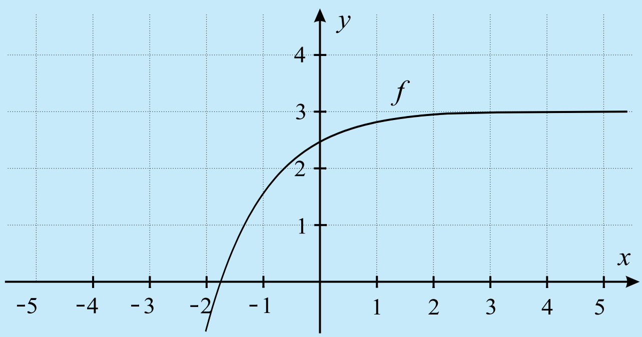
40 Karten-Sets für die mündliche Prüfung mit vielen hilfreichen Tipps und ausführlichen Lösungen

Für mehr Erfolg im Mathe-Abi

Analysis A 1

Vorbereitungszeit: 20 Minuten, erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (WTR), Merkhilfe

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 3 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$. Ihr Graph sei K_f.



a) Berechnen Sie die Schnittpunkte von K_f mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote von K_f.

b) Beschreiben Sie, wie K_f aus dem Graphen der Funktion e^x hervorgegangen ist. Begründen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

c) Erläutern Sie, wie man den Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f, der Geraden mit der Gleichung $y = 3$, der y-Achse und der Geraden $x = 4$ bestimmen kann.

d) Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ist eine Tangente an K_f.
Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten des zugehörigen Berührpunkts B erhalten kann.

e) Beurteilen Sie folgende Aussage: «Es gibt ganzrationale Funktionen vierten Grades, deren Graphen drei Wendepunkte besitzen».

Tipps A 1

a) Den Schnittpunkt S von K_f mit der y-Achse erhalten Sie, indem Sie $x = 0$ in $f(x)$ einsetzen. Den Schnittpunkt N von K_f mit der x-Achse erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $f(x) = 0$ durch Logarithmieren nach x auflösen.
Zur Bestimmung der Gleichung der Asymptote beachten Sie, dass e^{-x} für $x \to \infty$ gegen Null geht.

b) Überlegen Sie, wie K_f aus dem Graphen der Exponentialfunktion e^x durch Spiegelungen, Streckungen oder Verschiebungen hervorgeht.
Um zu begründen, dass f streng monoton wachsend ist, verwenden Sie die 1. Ableitung von f, die Sie mit der Kettenregel erhalten. Beachten Sie, dass $e^{-x} > 0$ gilt.
Falls $f'(x) > 0$, ist f streng monoton wachsend.

c) Den gesuchten Flächeninhalt erhalten Sie mithilfe eines Integrals. Beachten Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ oberhalb des Graphen von f verläuft und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

d) Beachten Sie, dass im Berührpunkt B die Steigung gleich groß ist wie die Steigung der gegebenen Geraden. Stellen Sie eine Gleichung auf und überlegen Sie, wie Sie den zugehörigen y-Wert erhalten.

e) Verwenden Sie als Ansatz für eine ganzrationale Funktion f vierten Grades die Gleichung $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ sowie deren Ableitungen. Beachten Sie, dass als notwendige Bedingung für Wendepunkte des Graphen von f die Gleichung $f''(x) = 0$ zu lösen ist. Überlegen Sie, wie viele Lösungen diese Gleichung maximal hat und was dies für die maximale Anzahl der Wendepunkte des Graphen von f bedeutet.

Geometrie G 1

Vorbereitungszeit: 20 Minuten, erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (WTR)

Gegeben sind die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

und die Ebene

$$\mathrm{E}\colon 2x_1 - x_3 = 6$$

a) Begründen Sie, dass sich g und E schneiden und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S von g und E.

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel von g und E.

c) Die Gerade g wird an der Ebene E gespiegelt. Erläutern Sie ein Verfahren, wie man die Gleichung der Spiegelgeraden g^* erhalten kann.

d) Die Gerade h ist parallel zu E und schneidet gleichzeitig die Gerade g orthogonal. Beschreiben Sie ein Verfahren, wie man eine Gleichung von h bestimmen kann.

Tipps G 1

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt des Richtungsvektors $\vec{u}$ von g mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ von E: $\vec{u} \cdot \vec{n}$.

Setzen Sie den allgemeinen Punkt P_t von g in E ein, lösen die Gleichung nach t auf und setzen den erhaltenen t-Wert in P_t ein, um den Schnittpunkt zu erhalten.

b) Verwenden Sie die Formel $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$, wobei $\vec{u}$ Richtungsvektor von g und $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E ist.

c) Skizzieren Sie die Problemstellung. Verwenden Sie eine Lotgerade, den Lotfußpunkt und eine geeignete Vektorkette. Stellen Sie g^* mithilfe eines Spielgelpunktes und eines geeigneten Richtungsvektors auf.

d) Skizzieren Sie die Problemstellung. Verwenden Sie den Ansatz: $h\colon \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v}$. Beachten Sie, dass $\vec{v}$ senkrecht zu $\vec{u}$ und senkrecht zu $\vec{n}$ sein muss. Verwenden Sie das Vektorprodukt.

Stochastik S 1

Vorbereitungszeit: 20 Minuten, erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (WTR)

Beim Strafstoß («Elfmeter») gibt es drei mögliche Ereignisse:

(1) Der Schütze erzielt ein Tor.

(2) Der Torhüter wehrt den Ball ab.

(3) Der Schütze trifft die Torbegrenzung oder verfehlt das Tor.

Der Fußballer Tom erzielt beim Strafstoß mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% ein Tor.

a) Tom schießt vier Strafstöße.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:
A: Er erzielt vier Tore.
B: Er erzielt mindestens drei Tore.
C: Er erzielt genau drei Tore in Folge.

b) Ein Freund bietet Tom folgendes Spiel an:
«Wenn du ein Tor erzielst, zahle ich dir einen Euro, sollte der Torhüter den Ball abwehren, zahlst du mir zwei Euro. Ansonsten musst du mir 10 Euro geben.»

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, wenn man davon ausgeht, dass auf lange Sicht keiner der beiden einen Gewinn macht, das Spiel also fair ist.

c) In einer Fußballliga wird bei 87% aller Strafstöße ein Tor erzielt.
In einer Saison wurden 70 Strafstöße gegeben.
Erläutern Sie, wie man die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 68 Tore erzielt wurden, berechnen kann.

d) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der erzielten Tore und erläutern Sie die Bedeutung der beiden Größen im Sachzusammenhang.

Tipps S 1

a) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der erzielten Tore mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A erhalten Sie mit Hilfe der Binomialverteilung unter Verwendung des Taschenrechners. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B erhalten Sie mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses unter Verwendung des Taschenrechners. Um die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C zu bestimmen, bezeichnen Sie mit t: er erzielt ein Tor und $\bar{t}$: er erzielt kein Tor. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er bei einem Schuss kein Tor erzielt. Beachten Sie, dass es für das Ereignis C zwei verschiedene Möglichkeiten gibt, dass er drei Tore in Folge erzielt.

b) Legen Sie x als Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, fest und bestimmen Sie mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses die Wahrscheinlichkeit, dass Tom kein Tor erzielt, in Abhängigkeit von x.
Legen Sie X als Zufallsvariable für die Einnahmen Toms fest und bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E(X)}$ von Toms Einnahmen (teilweise negativ), indem Sie diese mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten multiplizieren und anschließend addieren. Da das Spiel fair sein soll, lösen Sie die Gleichung $\mathrm{E(X)} = 0$ nach x auf.

c) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der erzielten Tore mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 68 Tore erzielt wurden, erhalten Sie mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses.
Alternativ verwenden Sie die Bernoulli-Formel: $\mathrm{P(X = k)} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{p}^{\mathrm{k}} \cdot (1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-k}}$.

d) Den Erwartungswert für die Anzahl der erzielten Tore erhalten Sie mit der Formel

$$\mathrm{E(X)} = \mu = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p}$$

Die Standardabweichung für die Anzahl der erzielten Tore erhalten Sie mit der Formel

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{n} \cdot \mathrm{p} \cdot (1-\mathrm{p})}$$

Beachten Sie, dass μ ein Durchschnittswert ist und die Standardabweichung eine Streuung um den Erwartungswert beschreibt.